

समय: 3 घंटे

नवम्बर 29, 2009

अनुदेश:

- किसी भी तरह के परिकलित्र(calculator) या कोणमापक का प्रयोग वर्जित है।
- रूलर और कंपास का प्रयोग किया जा सकता है।
- सभी प्रश्नोंके उत्तर दें। कुल100 अंक निर्धारित हैं।
- प्रत्येक नये प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से आरंभ करें। प्रश्न संख्या का स्पष्ट उल्लेख करें।

1.  $ABC$  एक त्रिकोण है, जिसमें  $AB = AC$  और  $I$  उसका अंतःकेन्द्र(in-center) बिन्दु है।  
यदि  $BC = AB + AI$  हो तो  $\angle BAC$  ज्ञात करें। [16]
2. सिद्ध करें कि ऐसा कोई  $a$  पूर्णांक नहीं है कि जिससे 289 संख्या,  $a^2 - 3a - 19$  को पूर्णतः विभाजित करे। [15]
3. सिद्ध करें कि  $3^{2008} + 4^{2009}$  को ऐसी दो धन पूर्णांक संख्याओं के गुणनफल से दर्शाया जा सकता है, जो प्रत्येक  $2009^{182}$  से अधिक हों। [16]
4. ऐसी सभी 3-अंकीय प्राकृतिक संख्याओं का योग बतलाइये जिनमें कम से कम एक अंक सम और कम से कम एक अंक विषम हो। [15]
5.  $\Gamma$  एक उत्तल (convex) बहुभुजीय आकृति है, जिसके किसी भी दो शीर्ष- बिन्दुओं की दूरी 1 से अधिक नहीं है।  
i.सिद्ध करें कि परिधि के किन्ही दो बिन्दुओं की परस्पर दूरी 1 से ज्यादा नहीं है।  
ii.यदि  $\Gamma$  में  $X$  और  $Y$  दो भिन्न बिन्दु हैं तो सिद्ध करें कि  $\Gamma$  की परिधि पर  $Z$  एक ऐसा बिन्दु है कि  $XZ + YZ \leq 1$  [19]
6. 1 से 100 पृष्ठ तक अंकित एक पुस्तक से कुछ पृष्ठ फाड़े गये है।  
बचे हुए पृष्ठों की संख्याओं का जोड़ 4949 है। फाड़े गये पृष्ठों की संख्या कितनी है? [19]