

## Regional Mathematical Olympiad - 2008

समय - 3 घंटे

नवंबर 09, 2008

अनुदेश -

- किसी भी तरह के परिकलित्र (calculator) या कोणमापक का प्रयोग वर्जित है।
- रूलर और कम्पास का प्रयोग किया जा सकता है।
- सभी प्रश्नों का उत्तर दें। कुल 100 अंक निर्धारित ह।
- प्रत्येक नये प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से आरंभ करें। प्रश्न संख्या का स्पष्ट उल्लेख करें।

1.  $ABC$  एक न्यूनकोणीय त्रिभुज है;  $BC$  और  $AB$  के  $D$  और  $F$  क्रमशः मध्यबिंदु हैं।  $F$  से  $AC$  पर डाला हुआ लंब और  $B$  से  $BC$  पर लंब बिंदु  $N$  में मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि  $ND$  त्रिभुज  $ABC$  के परिवृत्त त्रिज्या के बराबर है। [15]
2. सिद्ध कीजिए कि धन पूर्णाकों के ऐसे दो अपरिमित अनुक्रम  $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$  और  $\langle b_n \rangle_{n \geq 1}$  हैं जो निम्नलिखित सभी प्रतिबंध (conditions) एक ही साथ पूरे करते हैं।
  - (i)  $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ ;
  - (ii)  $a_n < b_n < a_n^2$ , सभी  $n \geq 1$  के लिए;
  - (iii)  $a_n - 1$  यह संख्या  $b_n - 1$  को भाग देती है, सभी  $n \geq 1$  के लिए;
  - (iv)  $a_n^2 - 1$  यह संख्या  $b_n^2 - 1$  को भाग देती है, सभी  $n \geq 1$  के लिए। [19]
3. यदि  $a$  और  $b$  ऐसी वास्तविक संख्याएं हैं कि घनीय समीकरण  $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$  के सभी मूल धन वास्तविक संख्याएं हैं, तो सिद्ध कीजिए कि
  - (i)  $0 < 3ab \leq 1$       और      (ii)  $b \geq \sqrt{3}$  [19]
4. 6 अंको की कितनी प्राकृतिक संख्याएं होंगी जिनमें अंको का योग 10 हो और 0, 1, 2, 3 इसमें का हर अंक कम से कम एक बार आए? [14]
5. तीन शून्येतर वास्तविक संख्याएं  $a, b, c$  हरात्मक श्रेढ़ी में कही जाती हैं यदि  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ । वे सभी तीन संख्यक हरात्मक श्रेढ़ीयां ज्ञात कीजिए जहां  $a, b, c$  वर्धमान धन क्रमांक हों,  $a = 20$ , और  $b, c$  को भाग देता हो। [17]
6. ऐसे सभी पूर्णांक भुजाओं के समद्विबाहु अधिकोणीय त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनकी परिधि 2008 हो। [16]