

# Regional Mathematical Olympiad-2007

समय-3 घंटे

अक्टूबर 7, 2007

अनुदेश -

- किसी भी तरह के परिकलित्र (calculator) या कोणमापक का प्रयोग वर्जित है।
- रूलर और कम्पास का प्रयोग किया जा सकता है।
- सभी प्रश्नों का उत्तर दें। कुल 100 अंक निर्धारित हैं।
- प्रत्येक नये प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से आरंभ करें। प्रश्न संख्या का स्पष्ट उल्लेख करें।

1.  $ABC$  एक न्यूनकोण त्रिभुज है ;  $\angle BAC$  की द्विभाजक रेखा  $AD$  है जहां  $D$  रेखा  $BC$  पर है ; और  $BE$ ,  $B$  से  $AC$  पर शीर्षलम्ब है। दिखाइए कि  $\angle CED > 45^\circ$ . [17]

2.  $a, b, c$  तीन प्राकृतिक संख्याएं हैं जिनमें  $a < b < c$  और  $\gcd(c-a, c-b) = 1$  है। मान लीजिए कि  $d$  एक ऐसा पूर्णांक है कि  $a+d, b+d, c+d$  एक समकोण त्रिभुज की भुजाएं हैं। सिद्ध कीजिए कि ऐसे  $l$  तथा  $m$  पूर्णांक होंगे कि  $c+d = l^2 + m^2$ . [17]

3. वास्तविक संख्याओं के सभी ऐसे युग्मों  $(a, b)$  को निकालिए कि यदि  $\alpha, x^2 + ax + b = 0$  का मूल हो तो  $\alpha^2 - 2$  भी मूल होगा। [17]

4. छः अंको की कितनी संख्याएं होंगी जिनमें-

(a) प्रत्येक संख्या के सभी अंक समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  से हों ;

(b) संख्या में आने वाला कोई भी अंक कम से कम दो बार आता हो ?

(उदाहरण के लिए 225252 एक ग्राह्य संख्या है जबकि 222133 नहीं है।) [16]

5. एक समलंबक  $ABCD$  जिसमें  $AB, CD$  के समांतर है एक वृत्त में उत्कीर्ण है जिसका केन्द्र  $O$  है। मान लीजिए कि समलंबक के विकर्ण  $AC$  और  $BD, M$  में प्रतिच्छेदित करते हैं और  $OM = 2$  है।

(a) यदि  $\angle AMB$  का मान  $60^\circ$  हो तो समांतर भुजाओं की लंबाइयों में अंतर प्रमाण सहित ज्ञात कीजिए

(b) यदि  $\angle AMD$  का मान  $60^\circ$  हो तो समांतर भुजाओं की लंबाइयों में अंतर प्रमाण सहित ज्ञात कीजिए

[17]

6. सिद्ध कीजिए कि,

(a)  $5 < \sqrt{5} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{5}$ ;

(b)  $8 > \sqrt{8} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{8}$ ;

(c)  $n > \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}$  जहां  $n$  पूर्णांक है और  $n \geq 9$  है। [16]